

AJUSTE DE LAS DISTRIBUCIONES GVE, LOG Y PAG CON MOMENTOS L DEPURADOS (1,1) EN 21 REGISTROS DE CRECIENTES ANUALES DE LA REGION HIDROLÓGICA No. 10 (SINALOA), MÉXICO

FITTING OF THE GEV, GLO AND GPA DISTRIBUTIONS WITH TRIMMED L MOMENTS (1, 1) IN 21 ANNUAL FLOOD RECORDS OF THE HYDROLOGICAL REGION No. 10 (SINALOA), MEXICO

Daniel F. Campos-Aranda

Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí. Genaro Codina Número 240. 78280 San Luis Potosí, San Luis Potosí. (campos_aranda@hotmail.com)

RESUMEN

El dimensionamiento y seguridad hidrológica de todas las obras hidráulicas de aprovechamiento o control depende de las crecientes de diseño. La estimación confiable de esas magnitudes hidrológicas está asociada con la disponibilidad de datos de gastos máximos anuales y su representación, lo más exacta posible, en una función de distribución de probabilidades (FDP). El método de los momentos L, que son combinaciones lineales de los estadísticos de orden, es uno de los procedimientos de ajuste más exactos que permite la estimación de los parámetros de una FDP. Versiones robustas se han propuesto de los momentos L, al dar peso nulo a los valores extremos de la muestra; es el caso de los momentos L depurados (1,1) que no toman en cuenta el dato menor ni el mayor. En este estudio, se exponen ambos métodos de ajuste para las FDP general de valores extremos (GVE), logística generalizada (LOG) y Pareto generalizada (PAG), que son modelos probabilísticos con aceptación mundial en el análisis de frecuencia de datos hidrológicos extremos. Mediante el error estándar de ajuste (EEA) se realizó el contraste de la aplicación de las FDP citadas, a los 21 registros de crecientes anuales disponibles en la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa, México). Los resultados indicaron que las FDP condujeron a los EEA menores en tres, siete y once de los registros procesados. El método de ajuste por momentos L depurados (1,1) logró un EEA menor en diez de los registros procesados. Por lo tanto, se recomienda su aplicación sistemática en los análisis de frecuencia de datos hidrológicos extremos.

Palabras clave: momentos L, momentos L depurados (1,1), distribuciones GVE, LOG y PAG, error estándar de ajuste, gráficos de diagnóstico.

ABSTRACT

The hydrological dimensioning and security of all water use or control works depend on the flood design. The reliable estimation of those hydrologic magnitudes is related to the availability of the most accurate possible maximum annual discharge data and their representation, in a probability distribution function (PDF). The method of L moments, which are linear combinations of the order statistics, is one of the most accurate fitting procedures that allow to estimate the parameters of an PDF. Robust versions have been proposed for L moments, since they give no weight to the extreme values of the sample; such is the case of the trimmed L moments (1,1), which do not take into account the lowest nor the highest data. This study presents both fitting methods for the PDFs general extreme value (GEV), generalized logistic (GLO) and generalized Pareto (GPA), which are probability models with worldwide acceptance in the frequency analysis of hydrological extreme data. Using the standard error of fit (SEF) the contrast was performed for the application of the mentioned PDFs, to 21 records of annual floods available in the Hydrological Region No. 10 (Sinaloa, Mexico). The results indicated that the PDFs led to the lowest SEFs in three, seven, and eleven of the records processed. The method of adjustment by trimmed L moments (1,1) achieved a lower SEF in ten of the records processed. Therefore, its systematic use is recommended in the frequency analyses of extreme hydrological data.

Key words: L moments, trimmed L moments (1,1), GEV, GLO, and GPA distributions, Fitting Standard Error, diagnosis graphs.

INTRODUCTION

The infrastructure for water use and control, such as reservoirs, protection dikes, embankments and rectifications, bridges,

* Autor responsable ♦ Author for correspondence.

Recibido: mayo, 2015. Aprobado: diciembre, 2015.

Publicado como ARTÍCULO en *Agrociencia* 50: 15-31. 2016.

INTRODUCCIÓN

La infraestructura hidráulica de aprovechamiento o control, como embalses, diques de protección, encauzamientos y rectificaciones, puentes y drenaje pluvial, requieren en sus etapas de planeación, diseño, operación y revisión de la estimación lo más exacta posible de las crecientes de diseño. Con base en esas estimaciones hidrológicas todas las obras hidráulicas se dimensionan y su seguridad depende de ellas. Las crecientes de diseño son predicciones que se asocian a probabilidades de excedencia reducidas. El método más confiable para obtenerlas consiste en representar los datos disponibles de gastos máximos anuales o serie anual de máximos por una función de distribución de probabilidades (FDP) y, a partir de ella, realizar las predicciones buscadas (Deka y Borah, 2011; Ahmad *et al.*, 2013). Este procedimiento se conoce como análisis de frecuencias de crecientes (AFC) y consta de las siguientes cinco etapas (Campos-Aranda, 2014): 1) recopilación de la información y verificación de su calidad estadística, 2) selección de una FDP, 3) elección de un método de estimación de sus parámetros de ajuste, 4) cuantificación objetiva del ajuste logrado con cada FDP y técnica de estimación, y 5) selección de resultados.

El AFC permite realizar predicciones cuyos intervalos promedio de recurrencia en años generalmente exceden varias veces la amplitud del registro disponible; por ello, son extrapolaciones que involucran errores. Para minimizar estos errores se sugieren dos enfoques diferentes. El primero fue utilizar FDP cada vez más flexibles y por ello se pasó de los modelos de dos parámetros de ajuste a los de tres, y se llegó al uso de la función Kappa de cuatro y la Wakeby o las funciones mixtas con cinco parámetros de ajuste. El segundo enfoque busca el uso mejorado de los datos disponibles, dando más importancia a sus valores grandes. Estadísticamente se trabaja con dos tipos nuevos de series de datos, conocidos como series de duración parcial y muestras censuradas o truncadas (Moisello, 2007).

La aplicación inicial de las series de duración parcial comenzó a mediados del siglo pasado y corresponde al uso de todos los datos superiores a un valor umbral; en cambio el uso de las series censuradas comenzó en la década de 1980. Desde la década de 1990 la técnica de ajuste de una FDP, mediante los momentos L, que son combinaciones lineales de los

and rainwater drainage, require in their stages of planning, design, operation and revision of the most accurate possible estimations of the flood designs. Based on these hydrological estimations, all these hydraulic works are dimensioned, and their security depends on them. The flood designs are predictions that relate to a reduced probability of exceedance. The most reliable method to obtain them is to represent the available data of maximum annual discharge or annual series of maximums with a probability function distribution (PDF), and from this, carry out the desired predictions (Deka and Borah, 2011; Ahmad *et al.*, 2013). This procedure is known as the flood frequency analysis (FFA) and it consists of the following five stages (Campos-Aranda, 2014): 1) compilation of information and verifying its statistical quality, 2) selecting an PDF, 3) choosing a method for estimating its fitting parameters, 4) objective quantification of the fitting achieved with each PDF and estimation technique, and 5) selecting results.

The FFA helps carry out predictions whose yearly recurrence average intervals generally exceed severalfold the amplitude of the record available, and they are therefore extrapolations that involve errors. In order to minimize these errors, two different approaches are suggested. The first one consists of using increasingly flexible PDFs, which is why the two fitting parameter models were changed for those with three parameters, and even the four parameter Kappa and Wakeby or mixed functions with five fitting parameters were used. The second approach seeks the improved use of the available data, giving more importance to its higher values. Statistically, there is work with two new types of data series, known as partial duration series, and censored or truncated samples (Moisello, 2007).

The initial application of the partial duration series began in mid-20th century, and corresponds to the use of all the data higher than a threshold value, whereas the use of the censored series began in the 1980s. Since the 1990s, the technique for fitting a PDF using L moments, which are linear combinations of the order statistics of the data, has become a standard procedure due to its ease and to the consistency of its results. Besides, the trimmed L moments (1,1) were proposed, which give no value to the lowest and highest values in the series, which is why they are more robust, since they are more

estadísticos de orden de los datos, se ha convertido en un procedimiento estándar debido a su sencillez y consistencia de resultados. Además se propusieron los momentos L depurados (1,1), los cuales dan peso nulo al valor menor y al mayor de la serie; por ello son más robustos, al ser menos sensibles a los valores dispersos o extremos (Shabri *et al.* 2011; Ahmad *et al.* 2013).

El objetivo de este estudio fue exponer la teoría de los momentos L, como base para la descripción detallada de los momentos L depurados (1,1). Las ecuaciones que estiman los tres parámetros de ajuste se citaron, con los métodos de momentos L y de momentos L depurados (1,1), en las tres FDP: la general de valores extremos (GVE), la logística generalizada (LOG) y la Pareto generalizada (PAG). En seguida se ajustaron, con ambos métodos, estas tres FDP a los 21 registros de crecientes anuales disponibles en la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa; México) y con base en el error estándar de ajuste se analizaron los resultados y se formularon las conclusiones.

MATERIALES Y MÉTODOS

Momentos L poblacionales

Los momentos estadísticos se utilizan para caracterizar una serie de datos observados o una FDP. Los momentos L y los L depurados se han establecido como procedimientos alternativos de los momentos convencionales, ya que tienen menor varianza de muestreo y son más robustos cuando hay valores dispersos. Como los momentos convencionales, los de orden de uno a cuatro caracterizan a la localización, escala, asimetría y kurtosis (Hosking, 1990; Elamir y Scheult, 2003).

De acuerdo con Karvanen (2006), el concepto de los momentos L se originó al final de la década de 1960, con variados resultados aislados sobre combinaciones lineales de los estadísticos de orden, los que culminaron con el trabajo de Greenwood *et al.* (1979). Hosking (1990) unificó la teoría de los momentos L y proporcionó guías para su uso práctico, que se han extendido a las áreas de la hidrología, meteorología y otras disciplinas de la ingeniería.

Los momentos L están relacionados con los valores esperados de los estadísticos de orden. Sea X una variable aleatoria y sea $X_{j:n}$ su estadístico de orden, otra variable aleatoria distribuida como su j -ésimo elemento más pequeño de una muestra aleatoria de tamaño n , tomada de la FDP de X . Además, sea $Q(u)$ la llamada función de cuantiles, es decir la solución inversa de la ecuación de la FDP, es entonces una función que aumenta en el intervalo de $u \in [0,1]$. Los primeros cuatro momentos L poblacionales son (Hosking, 1990; Hosking y Wallis, 1997; Karvanen, 2006):

sensitive to scattered or extreme values (Shabri *et al.* 2011; Ahmad *et al.* 2013).

The aim of this study was to expose the theory of the L moments as a base to describe in detail the trimmed L moments (1,1). The equations that estimate the three fitting parameters were mentioned, with the methods of L moments and trimmed L moments (1,1), in the three PDFs: the general extreme value (GEV), generalized logistics (GLO), and generalized Pareto (GPA). Next, these three PDFs were fitted, using both methods, to the 21 available records of annual floods in Hydrological Region No. 10 (Sinaloa; Mexico), and based on the fitting standard error, the results were analyzed and the conclusions were drawn.

MATERIALS AND METHODS

Population L Moments

Statistical moments are used to characterize a series of observed data or a PDF. The L moments and trimmed L moments were established as alternative procedures to conventional moments, since they have lower sampling variance and are more robust when there are disperse values. Like conventional moments, those of order one to four characterize the location, scale, asymmetry, and kurtosis (Hosking, 1990; Elamir and Scheult, 2003).

According to Karvanen (2006), the concept of L moments was created at the end of the 1960's, with various isolated results on linear combinations of the order statistics, which culminated with the work by Greenwood *et al.* (1979). Hosking (1990) unified the theory of L moments and provided guides for their practical use, which have extended to the areas of hydrology, meteorology, and other disciplines of engineering.

L moments are related to the expected values of the order statistics. Let X a random variable and $X_{j:n}$ its order statistic, another random variable distributed as its j -th smallest element from a random sample with size n , extracted from the PDF of X . Also, let $Q(u)$ the so-called quantile function, i.e., the reverse solution of the PDF equation, is then a function that is increased in the interval of $u \in [0,1]$. The first four population L moments are (Hosking, 1990; Hosking y Wallis, 1997; Karvanen, 2006):

$$\lambda_1 = E(X_{1:1}) = \int_0^1 Q(u) du \quad (1)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} E(X_{2:2} - X_{1:2}) = \int_0^1 Q(u)(2u-1) du \quad (2)$$

$$\lambda_1 = E(X_{1:1}) = \int_0^1 Q(u) du \quad (1)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} E(X_{2:2} - X_{1:2}) = \int_0^1 Q(u)(2u-1) du \quad (2)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3} E(X_{3:3} - 2X_{2:3} + X_{1:3}) = \int_0^1 Q(u)(6u^2 - 6u + 1) du \quad (3)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{4} E(X_{4:4} - 3X_{3:4} + 3X_{2:4} - X_{1:4}) = \int_0^1 Q(u)(20u^3 - 30u^2 + 12u - 1) du \quad (4)$$

su expresión general es:

$$\lambda_r = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} E(X_{r-k:r}) \text{ para cada momento } r=1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

donde el segundo paréntesis es un cociente de factoriales que define el número de combinaciones posibles de los m términos tomando q en cada arreglo; su expresión general es (Asquith, 2011):

$$\binom{m}{q} = \frac{m!}{q!(m-q)!} \quad \text{para } q \leq m \quad (6)$$

Por convención $0!=1$ y la función factorial Gamma es $\Gamma(m+1)=m!$. Los valores esperados de los estadísticos de orden de la ecuación 5 se estiman con la expresión siguiente (Hosking y Wallis, 1997; Kottegoda y Rosso, 2008; Asquith, 2011):

$$E(X_{r:n}) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^1 Q(u) \cdot u^{r-1} \cdot (1-u)^{n-r} du \quad (7)$$

La ecuación anterior establece la relación entre los momentos de probabilidad ponderada de Greenwood *et al.* (1979) y los momentos L. Los cocientes de momentos L de asimetría para $r=3$ y kurtosis para $r=4$ son:

$$\tau_r = \frac{\lambda_r}{\lambda_2} \quad \text{para } r = 3 \text{ y } 4 \quad (8)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3} E(X_{3:3} - 2X_{2:3} + X_{1:3}) = \int_0^1 Q(u)(6u^2 - 6u + 1) du \quad (3)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{4} E(X_{4:4} - 3X_{3:4} + 3X_{2:4} - X_{1:4}) = \int_0^1 Q(u)(20u^3 - 30u^2 + 12u - 1) du \quad (4)$$

its general expression is:

$$\lambda_r = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} E(X_{r-k:r}) \text{ for each moment } r=1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

where the second parenthesis is a quotient of factorials that defines the number of possible combinations of the m terms, taking q in each arrangement; its general expression is (Asquith, 2011):

$$\binom{m}{q} = \frac{m!}{q!(m-q)!} \quad \text{para } q \leq m \quad (6)$$

By conventions $0! = 1$ and the Gamma factorial function is $\Gamma(m+1)=m!$. The values expected of the order statistics of equation 5 are estimated using the following expression (Hosking and Wallis, 1997; Kottegoda and Rosso, 2008; Asquith, 2011):

$$E(X_{r:n}) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^1 Q(u) \cdot u^{r-1} \cdot (1-u)^{n-r} du \quad (7)$$

The above equation establishes the relation between the probability weighted moments by Greenwood *et al.* (1979) and the L moments. The quotients of L moments of asymmetry for $r=3$ and kurtosis for $r=4$ are:

$$\tau_r = \frac{\lambda_r}{\lambda_2} \quad \text{for } r = 3 \text{ y } 4 \quad (8)$$

Trimmed population L moments (1,1)

These moments, designated as "TL" for "Trimmed," which means depurated, cut, or truncated, give no weight to extreme observations and are therefore robust generalizations of the L moments. Its population expressions are (Elamir and Seheult, 2003; Hosking, 2007):

Momentos L depurados (1,1) poblacionales

Estos momentos, designados como “TL” de “Trimmed” que significa depurado, cortado o truncado, asignan peso nulo a las observaciones extremas y por ello son generalizaciones robustas de los momentos L. Sus expresiones poblacionales son (Elamir y Seheult, 2003; Hosking, 2007):

$$\lambda_1^{(1,1)} = E(X_{2:3}) = 6 \int_0^1 Q(u)u(1-u)du \quad (9)$$

$$\lambda_2^{(1,1)} = \frac{1}{2} E(X_{3:4} - X_{2:4}) = 6 \int_0^1 Q(u)u(1-u)(2u-1)du \quad (10)$$

$$\lambda_3^{(1,1)} = \frac{1}{3} E(X_{4:5} - 2X_{3:5} + X_{2:5}) = \frac{20}{3} \int_0^1 Q(u)u(1-u)(5u^2 - 5u + 1)du \quad (11)$$

$$\lambda_4^{(1,1)} = \frac{1}{4} E(X_{5:6} - 3X_{4:6} + 3X_{3:6} - X_{2:6}) = \frac{15}{2} \int_0^1 Q(u)u(1-u)(14u^3 - 21u^2 + 9u - 1)du \quad (12)$$

su expresión general es:

$$\lambda_r^{(s,t)} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} E(X_{r+s-k:r+s+t}) \text{ para } r = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Los cocientes de momentos L depurados (1,1) se calculan con la ecuación 8.

Momentos L depurados (1,1) de la muestra

En una muestra o serie de datos de tamaño n ordenada en forma progresiva de manera que $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ la estimación no sesgada de $\lambda_r^{(i)}$, debido a que $s=t$, será (Elamir y Seheult, 2003; Hosking, 2007):

$$l_r^{(i)} = \frac{1}{r} \sum_{i=t+1}^{n-t} \left[\frac{\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \binom{i-1}{r+t-1-k} \binom{n-i}{t+k}}{\binom{n}{r+2t}} \right] X_{i:n} \quad (14)$$

$$\lambda_1^{(1,1)} = E(X_{2:3}) = 6 \int_0^1 Q(u)u(1-u)du \quad (9)$$

$$\lambda_2^{(1,1)} = \frac{1}{2} E(X_{3:4} - X_{2:4}) = 6 \int_0^1 Q(u)u(1-u)(2u-1)du \quad (10)$$

$$\lambda_3^{(1,1)} = \frac{1}{3} E(X_{4:5} - 2X_{3:5} + X_{2:5}) = \frac{20}{3} \int_0^1 Q(u)u(1-u)(5u^2 - 5u + 1)du \quad (11)$$

$$\lambda_4^{(1,1)} = \frac{1}{4} E(X_{5:6} - 3X_{4:6} + 3X_{3:6} - X_{2:6}) = \frac{15}{2} \int_0^1 Q(u)u(1-u)(14u^3 - 21u^2 + 9u - 1)du \quad (12)$$

its general expression is:

$$\lambda_r^{(s,t)} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} E(X_{r+s-k:r+s+t}) \text{ for } r = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

The quotient of trimmed L moments (1,1) is calculated using equation 8.

Trimmed L moments (1,1) of the sample

In a sample or series of data sized n , ordered progressively in such a way that $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$, the estimation is not biased for $\lambda_r^{(i)}$, because $s=t$, it will be (Elamir and Seheult, 2003; Hosking, 2007):

$$l_r^{(i)} = \frac{1}{r} \sum_{i=t+1}^{n-t} \left[\frac{\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \binom{i-1}{r+t-1-k} \binom{n-i}{t+k}}{\binom{n}{r+2t}} \right] X_{i:n} \quad (14)$$

where $l_r^{(i)}$ is a symmetrically pondered linear combination of a trimmed or truncated sample sized $(n-2t)$ of values ordered $X_{t+1:n}, \dots, X_{n-t:n}$. The quotients of trimmed L moments (1,1) of the sample shall be: $t_3^{(1,1)}$ and $t_4^{(1,1)}$, evaluated with equation 8.

donde $I_r^{(i)}$ es una combinación lineal simétricamente ponderada de una muestra depurada o truncada de tamaño $(n-2t)$ de valores ordenados $X_{t+1:n}, \dots, X_{n-t:n}$. Los cocientes de momentos L depurados (1,1) de la muestra serán: $t_3^{(1,1)}$ y $t_4^{(1,1)}$, evaluados con la ecuación 8.

Ajuste con momentos L de las distribuciones GVE, LOG y PAG

Hosking y Wallis (1997) destacan en su Tabla 5.1, que estas tres FDP, cuando su parámetro de forma es negativo ($k < 0$), tienen sus colas derechas más gruesas o densas que todas las otras FDP comúnmente utilizadas en los AFC. Debido a ello han ganado aceptación en los análisis de frecuencias de datos hidrológicos extremos (El Adlouni *et al.* 2008). Esas FDP, cuando $k=0$, definen las funciones de dos parámetros de ajuste conocidas como Gumbel, logística y exponencial. Estas FDP también coinciden en tener un límite superior cuando $k > 0$.

A continuación se citan para las distribuciones GVE, LOG y PAG su fórmula $F(x)$, solución inversa $x(F)$, con la cual se estiman las predicciones que se asocian a una cierta probabilidad de no excedencia (F) y las ecuaciones que permiten estimar sus tres parámetros de ajuste (k, a, u) correspondientes a la forma, escala y ubicación, con el método de momentos L.

Distribución GVE (Stedinger *et al.*, 1993): intervalo de x : $u+a/k \leq x < \infty$ si $k < 0$; $-\infty < x < \infty$ si $k=0$; $-\infty < x \leq u+a/k$ si $k > 0$.

$$F(x) = e^{-e^{-y}} \quad (15)$$

donde y es la variable reducida:

$$y = -\frac{1}{k} \ln \left[1 - k \left(\frac{x-u}{a} \right) \right] ; \quad k \neq 0 \quad (16)$$

$$y = \left(\frac{x-u}{a} \right) ; \quad k = 0 \quad (17)$$

$$x(F) = u + \frac{a}{k} \left[1 - (-\ln F)^k \right] ; \quad k \neq 0 \quad (18)$$

$$x(F) = u - a \cdot \ln(-\ln F) ; \quad k = 0 \quad (19)$$

$$k \cong 7.8590 \cdot c + 2.9554 \cdot c^2 \quad (20)$$

Fittings with the L moments of the distributions GEV, GLO, and GPA

Hosking and Wallis (1997) point out in their Table 5.1 that these three PDFs, when their shape parameters are negative ($k < 0$), have thicker or more dense right tails than all other PDFs commonly used in the FFA. Due to this, they have gained acceptance in the frequency analysis of hydrological extreme data (El Adlouni *et al.* 2008). Such PDFs, when $k=0$, define functions with two fitting parameters known as Gumbel, logistic, and exponential. These PDFs also coincide in having a top limit when $k > 0$.

Below are the formula $F(x)$, and quantile function $x(F)$ used for distributions GEV, GLO, and GPA, to estimate the predictions that relate to a certain probability of non-exceedance (F) and the equations that help estimate its three fitting parameters (k, a, u) for form, scale, and location, using the method of L moments.

GEV distribution (Stedinger *et al.*, 1993): interval of x : $u+a/k \leq x < \infty$ si $k < 0$; $-\infty < x < \infty$ si $k=0$; $-\infty < x \leq u+a/k$ si $k > 0$.

$$F(x) = e^{-e^{-y}} \quad (15)$$

where y is the reduced variable:

$$y = -\frac{1}{k} \ln \left[1 - k \left(\frac{x-u}{a} \right) \right] ; \quad k \neq 0 \quad (16)$$

$$y = \left(\frac{x-u}{a} \right) ; \quad k = 0 \quad (17)$$

$$x(F) = u + \frac{a}{k} \left[1 - (-\ln F)^k \right] ; \quad k \neq 0 \quad (18)$$

$$x(F) = u - a \cdot \ln(-\ln F) ; \quad k = 0 \quad (19)$$

$$k \cong 7.8590 \cdot c + 2.9554 \cdot c^2 \quad (20)$$

where:

$$c = \frac{2}{3+t_3} - 0.63093 \quad (21)$$

$$a = \frac{l_2 \cdot k}{\Gamma(1+k) \cdot (1-2^{-k})} \quad (22)$$

donde:

$$c = \frac{2}{3+t_3} - 0.63093 \quad (21)$$

$$a = \frac{l_2 \cdot k}{\Gamma(1+k) \cdot (1-2^{-k})} \quad (22)$$

$$u = l_1 - \frac{a}{k} \left[1 - \Gamma(1+k) \right] \quad (23)$$

Para la evaluación de la función Gamma se utilizó la fórmula de Stirling (Davis, 1965):

$$\Gamma(\varepsilon) \cong e^{-\varepsilon} \cdot \varepsilon^{\varepsilon-1/2} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{12 \cdot \varepsilon} + \frac{1}{288 \cdot \varepsilon^2} - \frac{139}{51840 \cdot \varepsilon^3} - \frac{571}{2488320 \cdot \varepsilon^4} + \dots \right) \quad (24)$$

Distribución LOG (Rao y Hamed, 2000): intervalo de x , idéntico al de la GVE.

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-y}} \quad (25)$$

donde y igual a las ecuaciones 16 y 17.

$$x(F) = u + \frac{a}{k} \left\{ 1 - \left[\frac{(1-F)}{F} \right]^k \right\} ; \quad k \neq 0 \quad (26)$$

$$x(F) = u - a \cdot \ln[(1-F)/F] ; \quad k = 0 \quad (27)$$

$$k = -t_3 \quad (28)$$

$$a = \frac{l_2}{\Gamma(1+k) \cdot \Gamma(l-k)} \quad (29)$$

$$u = l_1 + \frac{l_2 - a}{k} \quad (30)$$

Distribución PAG (Hosking y Wallis, 1997): intervalo de x : $u \leq x < \infty$ si $k \leq 0$; $u \leq x \leq u + a/k$ si $k > 0$.

$$u = l_1 - \frac{a}{k} \left[1 - \Gamma(1+k) \right] \quad (23)$$

To evaluate the Gamma function, the Stirling formula (Davis, 1965) was used:

$$\Gamma(\varepsilon) \cong e^{-\varepsilon} \cdot \varepsilon^{\varepsilon-1/2} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{12 \cdot \varepsilon} + \frac{1}{288 \cdot \varepsilon^2} - \frac{139}{51840 \cdot \varepsilon^3} - \frac{571}{2488320 \cdot \varepsilon^4} + \dots \right) \quad (24)$$

GLO distribution (Rao and Hamed, 2000): interval of x , identical to that of GVE.

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-y}} \quad (25)$$

where y equals equations 16 and 17.

$$x(F) = u + \frac{a}{k} \left\{ 1 - \left[\frac{(1-F)}{F} \right]^k \right\} ; \quad k \neq 0 \quad (26)$$

$$x(F) = u - a \cdot \ln[(1-F)/F] ; \quad k = 0 \quad (27)$$

$$k = -t_3 \quad (28)$$

$$a = \frac{l_2}{\Gamma(1+k) \cdot \Gamma(l-k)} \quad (29)$$

$$u = l_1 + \frac{l_2 - a}{k} \quad (30)$$

GPA distribution (Hosking and Wallis, 1997): interval of x : $u \leq x < \infty$ si $k \leq 0$; $u \leq x \leq u + a/k$ si $k > 0$.

$$F(x) = 1 - e^{-y} \quad (31)$$

where y equals equations 16 and 17.

$$x(F) = u + \frac{a}{k} \left[1 - (1-F)^k \right] ; \quad k \neq 0 \quad (32)$$

$$F(x) = 1 - e^{-y} \quad (31)$$

donde y igual a las ecuaciones 16 y 17.

$$x(F) = u + \frac{a}{k} 1 - (1 - F)^k \quad ; \quad k \neq 0 \quad (32)$$

$$x(F) = u - a \cdot \ln(1 - F) \quad ; \quad k = 0 \quad (33)$$

$$k = \frac{1 - 3t_3}{1 + t_3} \quad (34)$$

$$a = l_2(1 + k) \cdot (2 + k) \quad (35)$$

$$u = l_1 - l_2(2 + k) \quad (36)$$

Con los momentos y cocientes L expuestos por Campos-Aranda (2014) se estimaron los tres parámetros de ajuste de las distribuciones GVE, LOG y PAG con las ecuaciones 20 a 24, 28 a 30 y 34 a 36, respectivamente.

Ajuste con momentos L depurados (1,1) de las distribuciones GVE, LOG y PAG

Para la distribución GVE, Deka y Borah (2011) desarrollaron una ecuación de $\tau_3^{(1,1)}$ en función del parámetro de forma (k), cuya expresión empírica inversa es:

$$k = 0.29616 - 2.92896 \cdot \tau_3^{(1,1)} + 1.42917 \cdot (\tau_3^{(1,1)})^2 - 0.91133 \cdot (\tau_3^{(1,1)})^3 \quad (37)$$

La cual es válida cuando $-0.70 \leq k \leq 0.50$ y tiene un coeficiente de determinación cercano a uno y error estándar de la estimación de 0.00261. Las ecuaciones 38 a 45 proceden de Deka y Borah (2011), Shabri *et al.* (2011) y Ahmad *et al.* (2013).

$$a = \frac{l_2^{(1,1)} [1 / \Gamma(k)]}{6 \left[\frac{1}{2(4^k)} - \frac{1}{3^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \right]} \quad (38)$$

$$x(F) = u - a \cdot \ln(1 - F) \quad ; \quad k = 0 \quad (33)$$

$$k = \frac{1 - 3t_3}{1 + t_3} \quad (34)$$

$$a = l_2(1 + k) \cdot (2 + k) \quad (35)$$

$$u = l_1 - l_2(2 + k) \quad (36)$$

Using the L moments and quotients displayed by Campos-Aranda (2014), the three fitting parameters of distributions GEV, GLO, and GPA were estimated using equations 20 to 24, 28 to 30, and 34 to 36, respectively.

Fitting with trimmed L moments (1,1) of the distributions GEV, GLO, and GPA

For the GEV distribution, Deka and Borah (2011) developed an equation of $\tau_3^{(1,1)}$ based on the parameter of shape (k), whose reverse empirical expression is:

$$k = 0.29616 - 2.92896 \cdot \tau_3^{(1,1)} + 1.42917 \cdot (\tau_3^{(1,1)})^2 - 0.91133 \cdot (\tau_3^{(1,1)})^3 \quad (37)$$

which is valid when $-0.70 \leq k \leq 0.50$ and has a determination coefficient close to one and a standard error of estimation of 0.00261. Equations 38 to 45 come from Deka and Borah (2011), Shabri *et al.* (2011), and Ahmad *et al.* (2013).

$$a = \frac{l_2^{(1,1)} [1 / \Gamma(k)]}{6 \left[\frac{1}{2(4^k)} - \frac{1}{3^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \right]} \quad (38)$$

$$u = l_1^{(1,1)} - \frac{a}{k} \left[1 - \Gamma(k+1) \left(\frac{3}{2^k} - \frac{2}{3^k} \right) \right] \quad (39)$$

For the GLO distribution, we have:

$$k = -\frac{9t_3^{(1,1)}}{5} \quad (40)$$

$$u = l_1^{(1,1)} - \frac{a}{k} \left[1 - \Gamma(k+1) \left(\frac{3}{2^k} - \frac{2}{3^k} \right) \right] \quad (39)$$

Para la distribución LOG se tienen:

$$k = -\frac{9t_3^{(1,1)}}{5} \quad (40)$$

$$a = -\frac{2l_2^{(1,1)} \cdot \text{sen}(\pi \cdot k)}{\pi \cdot k(k^2 - 1)} \quad (41)$$

$$u = l_1^{(1,1)} + \frac{\pi \cdot a \cdot (1 - k^2)}{\text{sen}(\pi \cdot k)} - \frac{a}{k} \quad (42)$$

y para la distribución PAG:

$$k = \frac{10 - 45t_3^{(1,1)}}{10 + 9t_3^{(1,1)}} \quad (43)$$

$$a = \frac{l_2^{(1,1)}(k+2)(k+3)(k+4)}{6} \quad (44)$$

$$u = l_1^{(1,1)} - \frac{a(k-5)}{(k+2)(k+3)} \quad (45)$$

Diagrama de cocientes de momentos L depurados (1,1)

Hosking y Wallis (1997) expusieron la relación gráfica y numérica (ecuación 46) que tiene el cociente de momentos L de asimetría (τ_3) con el de curtosis (τ_4) en cinco FDP, lo cual constituye el diagrama de cocientes de momentos L. Esta gráfica se puede utilizar para seleccionar la mejor FDP, de acuerdo con los valores de los cocientes de momentos L de asimetría y curtosis (t_3 y t_4) de la muestra local o a su estimación regional ponderada. Para obtener el diagrama de cocientes de momentos L depurados (1,1), se debe encontrar la relación entre $\tau_3^{(1,1)}$ y $\tau_4^{(1,1)}$ para cada FDP. Shabri *et al.* (2011) y Deka y Borah (2011) obtuvieron esas relaciones teóricas y las representaron con polinomios de cuarto grado para las distribuciones GVE y PAG, y de segundo para la LOG; los coeficientes de la ecuación 46 de cada polinomio están en el Cuadro 1.

$$a = -\frac{2l_2^{(1,1)} \cdot \text{sen}(\pi \cdot k)}{\pi \cdot k(k^2 - 1)} \quad (41)$$

$$u = l_1^{(1,1)} + \frac{\pi \cdot a \cdot (1 - k^2)}{\text{sen}(\pi \cdot k)} - \frac{a}{k} \quad (42)$$

and for GPA distribution:

$$k = \frac{10 - 45t_3^{(1,1)}}{10 + 9t_3^{(1,1)}} \quad (43)$$

$$a = \frac{l_2^{(1,1)}(k+2)(k+3)(k+4)}{6} \quad (44)$$

$$u = l_1^{(1,1)} - \frac{a(k-5)}{(k+2)(k+3)} \quad (45)$$

Diagram of quotients for trimmed L moments (1,1)

Hosking and Wallis (1997) displayed the graphic and numeric relation (equation 46) between the quotient of asymmetry L moments (τ_3) and that for kurtosis (τ_4) in five PDFs, which constitutes the diagram for L moment quotients. This graph can be used to select the best PDF, according to the values of the quotients for asymmetry and kurtosis L moments (t_3 and t_4) of the local sample, or to its regional pondered estimation. To obtain the diagram of quotients of trimmed L moments (1,1), a relation must be found between $\tau_3^{(1,1)}$ and $\tau_4^{(1,1)}$ for each PDF. Shabri *et al.* (2011) and Deka and Borah (2011) obtained such theoretical relations and represented them with fourth-degree polynomials for the distributions GVE and GPA, and second-degree polynomials for the GLO; the coefficients of equation 46 of each polynomial are in Table 1.

$$\tau_4^{(1,1)} = \sum_{p=0}^4 a_p \cdot (\tau_3^{(1,1)})^p \quad (46)$$

Based on equation 46 and its coefficients (Table 1), a diagram was created for trimmed L moments (1,1) for the distributions GEV, GLO, and GPA (Figure 1).

$$\tau_4^{(1,1)} = \sum_{p=0}^4 a_p \cdot (\tau_3^{(1,1)})^p \quad (46)$$

Con base en la ecuación 46 y sus coeficientes (Cuadro 1) se construyó el diagrama de cocientes de momentos L depurados (1,1), para las distribuciones GVE, LOG y PAG (Figura 1).

Error estándar de ajuste

A mediados de la década de 1970 se estableció al error estándar de ajuste (EEA) como un indicador estadístico cuantitativo, ya que evalúa la desviación estándar de las diferencias entre los valores observados y los estimados con la FDP que se prueba. Su expresión es la siguiente (Kite, 1977):

$$EEA = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2}{n - np}} \quad (47)$$

donde n y np son el número de datos de la muestra y de parámetros de ajuste, en este caso tres; x_i son los datos ordenados de menor a mayor y $\hat{x}_i$ son los valores estimados con la solución inversa $x(F)$ para una probabilidad de no excedencia estimada con la fórmula de Weibull (Benson, 1962):

$$P(X < x) = \frac{m}{n+1} \quad (48)$$

En la cual m es el número de orden del dato, con 1 para el menor y n para el mayor.

Indicadores cualitativos del ajuste

Los diagramas de diagnóstico de probabilidades y el de cantidades se han popularizado (Coles, 2001; Wilks, 2011); el primero emplea en el eje de las abscisas la probabilidad empírica estimada con la ecuación 48 y en las ordenadas la probabilidad que define la FDP ajustada para cada dato disponible, ordenados en forma progresiva de magnitud ($x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$), la que se estima con las ecuaciones 15, 25 y 31 para las distribuciones GVE, LOG y PAG. En el gráfico de cantidades se indica en las abscisas el valor del dato observado $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ y en las ordenadas el valor estimado con la solución inversa de la FDP, con las ecuaciones 18, 26 y 32 para las funciones GVE, LOG y PAG, y la probabilidad empírica estimada con la ecuación 48. En resumen las coordenadas x y y de cada diagrama son (Coles, 2001):

Cuadro 1. Coeficientes de los polinomios de aproximación de $\tau_4^{(1,1)}$ en función de $\tau_3^{(1,1)}$ en las distribuciones GVE, LOG y PAG según Shabri *et al.* (2011).

Table 1. Coefficients of the polynomials of approximation of $\tau_4^{(1,1)}$ based on $\tau_3^{(1,1)}$ in the distributions GEV, GLO, and GPA according to Shabri *et al.* (2011).

Coefficiente	GVE	LOG	PAG
a_0	0.0576	0.0833	—
a_1	0.0943	—	0.1610
a_2	0.9183	0.9450	0.9904
a_3	-0.0745	—	-0.1295
a_4	0.0373	—	0.0184

Standard Error of Fit

In the mid-1960's, the standard error of fit (SEF) was established as a quantitative statistical indicator, since it evaluates the standard deviation of the differences between the values observed and estimates with the PDF tested. Its expression is as follows (Kite, 1977):

$$SEF = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2}{n - np}} \quad (47)$$

where n and np are the number of data in the samples and fitting parameter, in this case, 3; x_i are the data arranged from lowest to greatest, and $\hat{x}_i$ are the values estimated with the reverse solution $x(F)$ for a probability of non-exceedance estimated using Weibull's formula (Benson, 1962):

$$P(X < x) = \frac{m}{n+1} \quad (48)$$

In which m is the number of the order of data, with 1 for lowest, and n for the greatest.

Qualitative indicators of the fitting

The diagnostic diagrams for probability and for quantities have become popular (Coles, 2001; Wilks, 2011); the first uses in the horizontal axis the empirical probability estimated using equation 48, and in the vertical axis, the probability that defines the PDF adjusted for all data available, ordered by magnitude ($x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$), which is estimated with equations 15, 25,

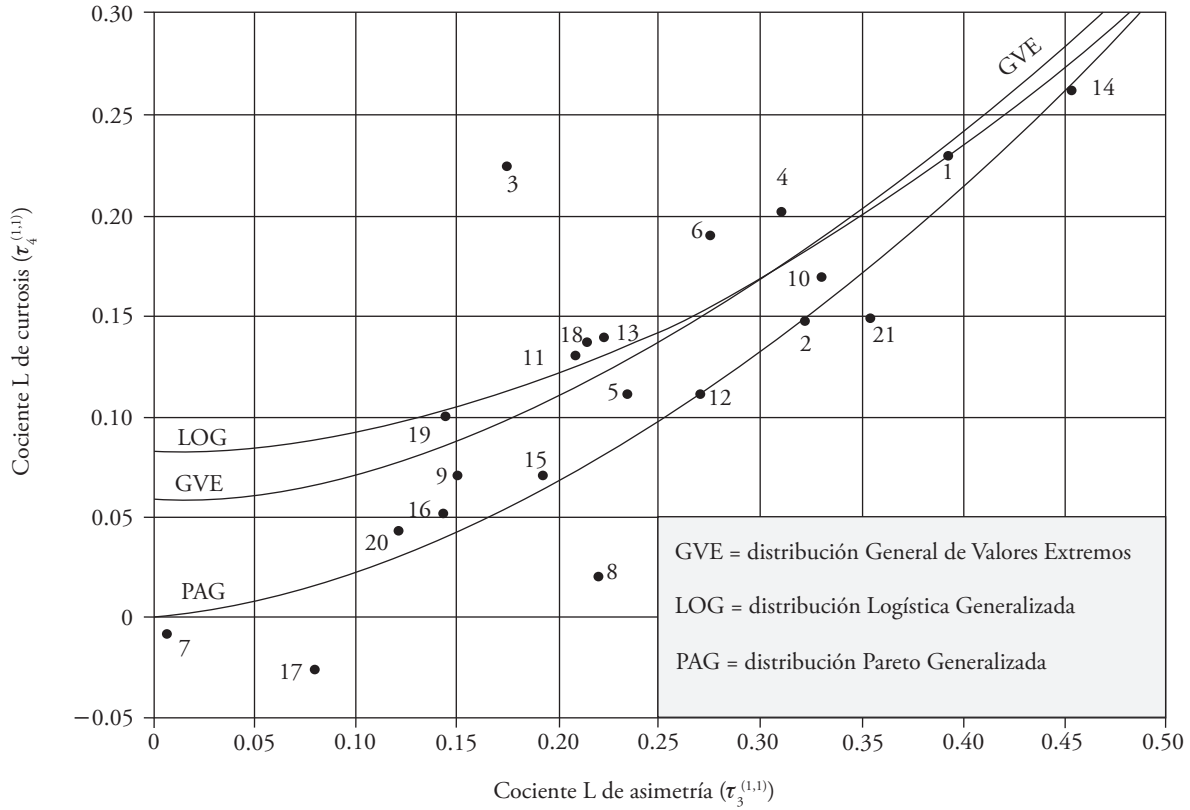


Figura 1. Diagrama de cocientes de momentos L depurados (1,1) de las distribuciones GVE, LOG y PAG según Shabri *et al.* (2013), y localización de 21 registros de crecientes de la Región Hidrológica No. 10, Sinaloa, México.

Figure 1. Diagram of quotients of trimmed L moments (1,1) of the GEV, GLO, and GPA distributions according to Shabri *et al.* (2013), and localization of flood records of the Hydrological Region No. 10, Sinaloa, México.

$$\text{Probabilidades } \left\{ \left[\frac{i}{n+1}, F(x_i) \right] : i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (49)$$

$$\text{Cantidades } \left\{ x_i, x \left(\frac{i}{n+1} \right) : i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (50)$$

Registros procesados de crecientes anuales

Entre los registros de gastos máximos anuales ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$) de las estaciones hidrométricas de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa; México) existen 21 que no tienen régimen de escurrimiento afectado por embalses, cambios físicos drásticos o ambos en sus cuencas y muestran más de veinte años de datos en el sistema BANDAS (IMTA, 2002). Los registros de las estaciones de aforos Huites y Guamuchil llegan hasta el año en que la construcción del embalse respectivo afectó su escurrimiento. Los datos de la estación San Francisco proceden del Boletín Hidrológico No. 36 (SRH, 1975). Campos-Aranda (2014) verificó la calidad

and 31 for distributions GEV, GLO, and GPA. The graph for quantities indicates, on the horizontal axis, the value of the data observed $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, and on the vertical, the value estimated using the reverse solution of the PDF using equations 18, 26, and 32 for functions GEV, GLO, and GPA, and the empirical probability, estimated using equation 48. In sum, the coordinates for x and y of each diagram are (Coles, 2001):

$$\text{Probabilidades } \left\{ \left[\frac{i}{n+1}, F(x_i) \right] : i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (49)$$

$$\text{Cantidades } \left\{ x_i, x \left(\frac{i}{n+1} \right) : i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (50)$$

Records processed of annual floods

Among the records for maximum annual discharge ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$) in the hydrometric stations of the Hydrological Region No.

estadística de los registros citados y presenta sus momentos y cocientes L ; además expone un mapa con la localización de las 21 estaciones hidrométricas y sus cuencas respectivas.

El registro más corto tiene 19 años y los más largos 56, con valor mediano de 33 años (Cuadro 2). Los momentos L depurados (1,1) estimados a través de la ecuación 14 y los cocientes de momentos calculados con la ecuación 8 se presentan en el Cuadro 2.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Selección de la FDP más conveniente

Cada registro de crecientes se llevó al diagrama de cocientes de momentos L depurados (1,1) para obtener la FDP más conveniente de acuerdo a sus valores de cocientes L de asimetría y curtosis (Cuadro 2). Once registros se aproximaron a la función PAG, siete a la LOG y tres pudieran ser representados por la distribución GVE (Figura 1) (Cuadro 3).

Error estándar de ajuste

Por medio de sus soluciones inversas de FDP (ecuaciones 18, 26 y 32) se obtuvieron las estimaciones $\hat{x}_i$ para aplicar la ecuación 47 del *EEA* (Cuadro 3, columnas moL).

Con los momentos y cocientes L depurados (1,1) (Cuadro 2) y las ecuaciones 37 a 45 se obtuvieron los tres parámetros de ajuste de las funciones GVE, LOG y PAG. En seguida, por medio de sus soluciones inversas (ecuaciones 18, 26 y 32) se estimaron los valores de $\hat{x}_i$ para calcular los respectivos *EEA* (Cuadro 3, columnas moLD).

El *EEA* menor de los seis calculados se identificó (Cuadro 3, en paréntesis circular) y valores iguales ocurrieron en los registros de Chinipas y Zopilote, seleccionando el ajuste que aportó las predicciones más grandes (Cuadro 3, en paréntesis rectangular). Los *EEA* mínimos definidos por las distribuciones GVE, LOG y PAG coincidieron con las FDP en once registros (Figura 1): San Francisco, Ixpalino, La Huerta, Tamazula, Naranjo, Acatitán, Zopilote, Chico Ruiz, El Bledal, La Tina y Bamícori.

El ajuste de las distribuciones GVE, LOG y PAG con base en los momentos L depurados (1,1) (Cuadro 3, último renglón) es una opción que puede abatir el *EEA* del método de momentos L de una manera sistemática, pues esto ocurrió en diez registros.

10 (Sinaloa; Mexico), 21 have no runoff regime affected by reservoirs, drastic physical changes or both in their basins, and they display data of over twenty years in the BANDAS system (IMTA, 2002). The records in the hydrometric stations Huites and Guamuchil reach up to the year in which the construction of the respective reservoir affected its runoff. The data from the San Francisco station come from the Hydrological Bulletin No. 36 (SRH, 1975). Campos-Aranda (2014) verified the statistical quality of the records cited and presents the L quotients and moments, and displays a map with the location of the 21 hydrometric stations and their respective basins.

The shortest record have 19 years old and the longest, 56, with an average value of 33 years (Table 2). The fitted L moments (1,1) estimated using equation 14 and the quotients of the moments calculated with equation 8 are shown in Table 2.

RESULTS AND DISCUSSION

Selection of the most convenient PDF

Each record of floods was taken into the diagram of quotients of trimmed L moments (1,1) to obtain the most convenient PDF according to its L quotients for asymmetry and kurtosis (Table 2). Eleven records came close to the GPA function, seven to GLO, and three could be represented with the GEV distribution (Figure 1) (Table 3).

Standard error of fit

Using the reverse solutions of PDF (equations 18, 26, and 32) the $\hat{x}_i$ estimations were obtained to apply equation 47 of the *SEF* (Table 3, columns moL).

With the trimmed L moments and quotients (1,1) (Table 2) and equations 37 to 45, the three fitting parameters were obtained for functions GEV, GLO, and GPA. Afterwards, using their reverse solutions (equations 18, 26, and 32) the values of $\hat{x}_i$ were estimated to calculate the respective *SEFs* (Table 3, columns moLD).

The lowest *SEF* of the six calculated was identified (Table 3, in circular parentheses) and equal values occurred in the records for Chinipas and Zopilote, selecting the adjustment that provided the largest predictions (Table 3, in rectangular parentheses). The minimum *SEFs* defined by distributions GEV, GLO, and GPA coincided with PDFs in eleven records (Figure 1): San Francisco, Ixpalino, La Huerta,

Cuadro 2. Características generales, momentos y cocientes L depurados (1,1), en 21 registros procesados de crecientes anuales de la Región Hidrológica No. 10, Sinaloa, México.
Table 2. General characteristics, trimmed L moments and quotients (1,1) in 21 processed records from annual floods of Hydrological Region No. 10, Sinaloa, Mexico.

No.	Estación hidrométrica	Área de cuenca (km ²)	Años de Registro (n)	$I_1^{(1,1)†}$	$I_2^{(1,1)}$	$I_3^{(1,1)}$	$I_4^{(1,1)}$	$\tau_3^{(1,1)‡}$	$\tau_4^{(1,1)}$
1	Huites	26 057	1942–1992 (51)	2578.9710	643.4111	252.0877	148.1874	0.39180	0.23032
2	San Francisco	17 531	1941–1973 (33)	1417.6250	334.2696	107.8858	49.8560	0.32275	0.14915
3	Santa Cruz	8919	1944–2002 (52)	825.6472	191.9839	33.6176	43.3249	0.17511	0.22567
4	Jaina	8179	1942–1998 (56)	789.5898	188.1527	58.7587	38.1695	0.31229	0.20286
5	Palo Dulce	6439	1958–1986 (21)	818.7865	145.9885	34.1639	16.8504	0.23402	0.11542
6	Ixpalino	6166	1953–1999 (45)	986.9792	186.6518	51.6721	35.2875	0.27684	0.18906
7	La Huerta	6149	1970–1999 (28)	927.6062	197.2018	1.4513	–1.7109	0.00736	–0.00868
8	Chinipas	5098	1965–2002 (24)	790.5296	159.9196	35.3124	3.2871	0.22081	0.02055
9	Tamazula	2241	1963–1999 (32)	531.4827	76.7720	11.5965	5.4135	0.15105	0.07051
10	Naranjo	2064	1939–1984 (45)	497.4072	157.6427	51.9003	26.6872	0.32923	0.16929
11	Acatitán	1884	1955–2002 (43)	664.8182	195.9668	40.7487	25.5050	0.20794	0.13015
12	Guamuchil	1645	1940–1971 (32)	577.3327	128.4394	34.5535	14.3540	0.26903	0.11176
13	Choix	1403	1956–2002 (38)	290.3594	55.7844	12.2758	7.7038	0.22006	0.13810
14	Badiraguato	1018	1974–1999 (26)	746.8054	239.1029	108.2557	62.7376	0.45276	0.26239
15	El Quelite	835	1961–2001 (33)	408.9254	109.0321	20.8927	7.7677	0.19162	0.07124
16	Zopilote	666	1939–2001 (56)	319.5128	89.7444	12.7530	4.5793	0.14210	0.05103
17	Chico Ruiz	391	1977–2002 (19)	196.6518	52.4802	4.1569	–1.4225	0.07921	–0.02711
18	El Bledal	371	1938–1994 (56)	241.8649	54.0593	11.5716	7.4244	0.21405	0.13734
19	Pericos	270	1961–1992 (30)	229.4434	44.2758	6.3602	4.4083	0.14365	0.09956
20	La Tina	254	1960–1983 (24)	75.5672	21.1883	2.5428	0.9513	0.12001	0.04490
21	Bamícori	223	1951–1983 (33)	153.8719	45.9496	16.1642	6.8401	0.35178	0.14886

† Momentos L depurados (1,1) de la muestra ♦ quotients of trimmed L moments (1,1) from the sample.

‡ Cocientes de momentos L depurados (1,1) de la muestra ♦ Trimmed L moments (1,1) from the sample.

Cuadro 3. Errores estándar de ajuste ($\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$) obtenidos con los métodos de momentos L y momentos L depurados (1,1), en 21 registros de crecientes anuales de la Región Hidrológica No. 10, Sinaloa, México.**Table 3. Standard errors of fit ($\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$) obtained using the L moment and trimmed L moment (1,1) methods in 21 annual flood records of Hydrological Region No. 10, Sinaloa, Mexico.**

No	Estación hidrométrica	FDP según DCM [‡]	Error Estándar de Ajuste (<i>EEA</i>) [†]					
			GVE		LOG		PAG	
			moL [§]	moLD [§]	moL	moLD	moL	moLD
1	Huites	LOG	979	1101	1061	1099	(834)	875
2	San Francisco	PAG	377	232	419	249	302	(200)
3	Santa Cruz	LOG	(406)	599	421	564	409	691
4	Jaina	GVE	360	285	382	(270)	346	382
5	Palo Dulce	GVE	895	1063	922	1056	(866)	1095
6	Ixpalino	LOG	346	349	367	(332)	334	432
7	La Huerta	PAG	96	111	124	148	(53)	63
8	Chinipas	PAG	139	98	154	[98]	126	117
9	Tamazula	GVE	(145)	189	150	179	147	216
10	Naranjo	PAG	156	185	173	193	(127)	132
11	Acatitán	LOG	227	219	239	(196)	231	293
12	Guamuchil	PAG	235	210	247	(202)	225	245
13	Choix	LOG	105	126	110	120	(101)	149
14	Badiraguato	PAG	1077	(791)	1130	860	1037	872
15	El Quelite	PAG	87	71	98	(69)	74	93
16	Zopilote	PAG	48	62	61	81	25	[25]
17	Chico Ruiz	PAG	28	30	34	36	(16)	17
18	El Bledal	LOG	64	72	67	(63)	68	100
19	Pericos	LOG	29	26	33	26	(24)	33
20	La Tina	PAG	90	116	92	114	(87)	122
21	Bamícori	PAG	52	77	57	77	(43)	64
	Número de mínimos		2	1	0	7	9	2

[†]En paréntesis circular o rectangular su valor mínimo de cada estación. ♦ In circular or rectangular parenthesis the minimum value of each station.

[‡]Diagrama de cocientes de momentos. ♦ Diagram of quotients of moments.

[§]moL: ajuste por momentos L y moLD: ajuste por momentos L depurados (1,1). ♦ moL: fittings by L moments and moLD: fitting by trimmed L moments (1,1).

Destaca el ajuste con tal método de la función LOG, el cual mostró los *EEA* menores en siete registros. También sobresalió la distribución PAG que condujo a los ajustes mayores en 11 de los 21 registros procesados, nueve de ellos con el método de momentos L.

El resultado último no debe guiar hacia la aplicación exclusiva de tal FDP, ya que en los registros de Santa Cruz, Palo Dulce, Tamazula, Choix, Badiraguato y La Tina, con las otras funciones se obtuvieron *EEA* mínimos, casi iguales, y en varios registros como: Ixpalino, Chinipas, Guamuchil, El Quelite y Pericos, se lograron *EEA* semejantes. Debido a lo anterior, se recomienda seguir aplicando bajo precepto a las distribuciones GVE y LOG.

Tamazula, Naranjo, Acatitán, Zopilote, Chico Ruiz, El Bledal, La Tina, and Bamícori.

The fitting of distributions GEV, GLO, and GPA, based on the trimmed L moments (1,1) (Table 3, last line) is an option that can systematically take down the *SEF* of the method of L moments, since this took place in ten records. The fitting using this method of the GLO function stands out, showing the lowest *SEFs* in seven records. The GPA distribution also stood out, which led to the highest fittings in eleven of the 21 records processed, nine of them with the method of L moments.

The final result must not guide to the exclusive application of such PDF, since the records for Santa

Predicciones obtenidas con el mejor ajuste

Las predicciones con cada uno de los mejores ajustes en los registros procesados (Cuadro 4, tercera columna) se obtuvieron según los resultados moLD (Cuadro 3). Para el registro de la estación hidrométrica Jaina, el método de momentos L produjo EEA del orden de $360 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ con las distribuciones GVE, LOG y PAG; en cambio, con el procedimiento de los momentos L depurados (1,1) se logró la reducción a $270 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ con la función LOG. Para este ajuste en los diagramas de diagnóstico respectivos se verificó el ajuste alcanzado (Figura 2 y 3).

CONCLUSIONES

La motivación para representar a los datos de gastos máximos anuales con una FDP consiste en

Cruz, Palo Dulce, Tamazula, Choix, Badiraguato, and La Tina, with the other functions, gave minimum $SEFs$, nearly equal, and in several records, such as Ixpalino, Chinipas, Guamuchil, El Quelite, and Pericos, similar $SEFs$ were obtained. Due to this, we recommend the application of under precepts to the distributions GEV and GLO.

Predictions obtained with the best fit

The predictions with each of the best adjustments in the records processed (third column in Table 4) were obtained according to the moLD results (Table 3). For the record of the Jaina hydrometric station, the method of L moments produced SEF of around $360 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ with distributions GEV, GLO, and GPA; on the other hand, using the procedure of the trimmed L moments (1,1) this was reduced to 270

Cuadro 4. Predicciones ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$) obtenidas con los ajustes mejores en 21 registros de crecientes anuales de la Región Hidrológica No. 10, Sinaloa, México.

Table 4 . Predictions ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$) obtained with the best fittings in 21 annual floods records of Hydrological Region No. 10, Sinaloa, Mexico.

No.	Estación hidrométrica	FDP y MA [†]	Periodos de retorno en años					
			10	25	50	100	500	1000
1	Huites	PAG–moL	6710	10 581	14 355	19 056	34 919	44 673
2	San Francisco	PAG–moLD	3619	5771	7926	10 673	20 327	26 486
3	Santa Cruz	GVE–moL	2104	3258	4410	5883	11 118	14 497
4	Jaina	LOG–moLD	1990	3365	4967	7317	17 985	26 512
5	Palo Dulce	PAG–moL	1984	3386	4988	7282	17 183	24 745
6	Ixpalino	LOG–moLD	2141	3340	4665	6523	14 340	20 125
7	La Huerta	PAG–moL	1764	1935	2002	2041	2079	2085
8	Chinipas	LOG–moLD	1725	2553	3396	4495	8563	11 288
9	Tamazula	GVE–moL	1009	1390	1745	2173	3543	4349
10	Naranjo	PAG–moL	1449	2183	2815	3522	5506	6534
11	Acatitán	LOG–moLD	1793	2758	3720	4955	9396	12 297
12	Guamuchil	LOG–moLD	1365	2167	3042	4258	9262	12 944
13	Choix	PAG–moL	683	998	1275	1592	2514	3009
14	Badiraguato	GVE–moLD	2691	5510	9584	16776	62319	109 957
15	El Quelite	LOG–moLD	1025	1528	2017	2632	4765	6114
16	Zopilote	PAG–moLD	787	976	1087	1175	1319	1361
17	Chico Ruiz	PAG–moL	429	490	518	537	558	562
18	El Bledal	LOG–moLD	555	828	1102	1458	2752	3608
19	Pericos	PAG–moL	480	599	676	742	865	906
20	La Tina	PAG–moL	239	392	539	722	1335	1709
21	Bamícori	PAG–moL	418	610	769	942	1403	1630

[†]Método de ajuste: moL, por momentos L y moLD, por momentos L depurados (1,1). ♦ method of fitting: moL, by L and moments and moLD, by L moments and moLD, by trimmed L moments (1,1).

permitir realizar predicciones confiables o estimaciones de las crecientes de diseño, lo cual depende de la exactitud del ajuste logrado. Por lo anterior, el *EEA* es el elemento básico de selección.

Los resultados del contraste de las distribuciones GVE, LOG y PAG, en 21 registros de crecientes anuales de la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa, México), con los métodos de ajuste de momentos L y de momentos L depurados (1,1), destacan la conveniencia de aplicar sistemáticamente a la distribución PAG, ya que condujo a los *EEA* menores en once de las series procesadas. Con la función LOG se logran los *EEA* menores en siete registros y con la distribución GVE en tres.

El uso del método de momentos L depurados (1,1), para lograr mejores ajustes de las tres distribuciones aplicadas, permite sugerir su aplicación sistemática en los análisis de frecuencia de crecientes, ya que reduce el *EEA* en la mitad de los registros procesados. El ajuste de la distribución LOG con este procedimiento destacó, ya que también alcanza *EEA* menores, en siete registros.

LITERATURA CITADA

Ahmad, U. N., A. Shabri and Z. A. Zakaria. 2013. An analysis of annual maximum streamflows in Terengganu, Malaysia

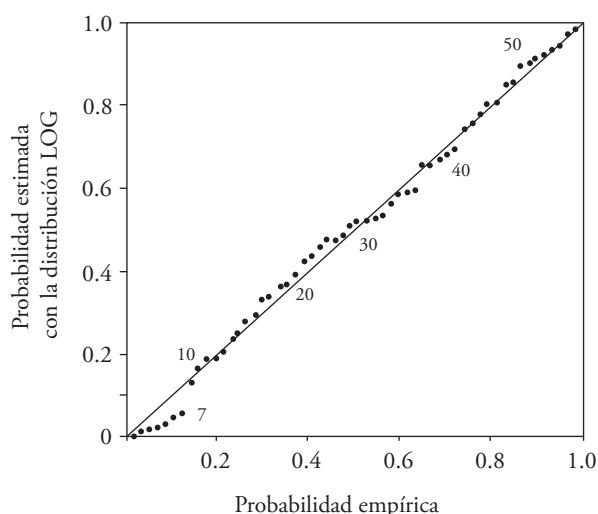


Figura 2. Diagrama de probabilidad para el registro de crecientes anuales de la estación hidrométrica Jaina, con ajuste de la distribución LOG ($EEA=270 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$).

Figure 2. Diagram of probability for the record of annual floods in the Jaina hydrometric station, with a fitting distribution LOG ($SEF=270 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$).

$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ with the function GLO. For this fitting in the respective diagnostic diagrams, the fitting reached was verified (Figures 2 and 3).

CONCLUSIONS

The motivation to represent the maximum annual discharge data with an PDF consisted in permitting to carry out reliable predictions or estimations of the design floods, which depends on the accuracy of the fitting achieved. Therefore, *SEF* is the basic selection element.

The results of the contrast of the distributions GEV, GLO, and GPA, in 21 annual flood records of Hydrological Region No. 10 (Sinaloa, Mexico), along with the methods of fitting L moments and trimmed L moments (1,1), highlight the convenience of systematically applying the distribution GPA, since it led to the lower *SEFs* in eleven of the series processed. With the function GLO the lowest *SEFs* are obtained in seven records and with the GEV distribution in three.

The use of the method of trimmed L moments (1,1) to achieve better fittings of the three distributions applied, helps suggest its systematic application in

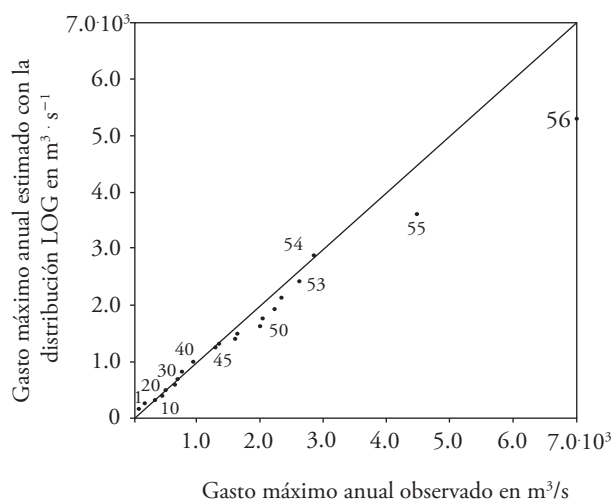


Figura 3. Diagrama de cantidades para el registro de crecientes anuales de la estación hidrométrica Jaina, con ajuste de la distribución LOG ($EEA=270 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$).

Figure 3. Diagram of quantities for the recording of annual floods for the Jaina hydrometric station, with a fitting distribution GLO ($SEF=270 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$).

- using TL-moments approach. *Theor. Appl. Climatol.* 111: 649-663.
- Asquith, W. H. 2011. Order Statistics. *In: Distributional Analysis with L-moment Statistics using the R Environment for Statistical Computing*. Author edition (ISBN-13: 978-1463508418). Texas, U.S.A. pp: 47-59.
- Benson, M. A. 1962. Plotting positions and economics of engineering planning. *J. Hydraulics Div.* 88: 57-71.
- Campos-Aranda, D. F. 2014. Análisis regional de frecuencia de crecientes en la Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa), México. 2: contraste de predicciones locales y regionales. *Agrociencia* 48: 255-270.
- Coles, S. 2001. Model diagnostics. *In: An introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer-Verlag London Limited. London, England. pp: 36-44.
- Davis, P. J. 1965. Gamma function and related functions. *In: Abramowitz M. and I. Stegun (ed). Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications. New York, U.S.A. pp: 253-296.
- Deka, S. and M. Borah. 2011. Statistical analysis of flood peak data of North Brahmaputra region of India based on the methods of TL-moment. *Theor. Appl. Climatol.* 104: 111-122.
- El Adlouni, S., B. Bobée and T. B. M. J. Ouarda. 2008. On the tails of extreme event distributions in hydrology. *J. Hydrol.* 355: 16-33.
- Elamir, E. A. H. and A. H. Seheult. 2003. Trimmed L-moments. *Computational Stat. & Data Analysis* 43: 299-314.
- Greenwood, J. A., J. M. Landwehr, N. C. Matalas and J. R. Wallis. 1979. Probability weighted moments: Definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. *W. Res. Research* 15: 1049-1054.
- Hosking, J. R. M. 1990. L-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. *J. R. Stat. Soc. B.* 52: 105-124.
- Hosking, J. R. M. 2007. Some theory and practical uses of trimmed L-moments. *J. Stat. Plann. Inference* 137: 3024-3039.
- Hosking, J. R. M. and J. R. Wallis. 1997. Regional Frequency Analysis. An Approach Based on L-moments. Cambridge University Press. Cambridge, England. 224 p.
- IMTA (Instituto Mexicano de Tecnología del Agua). 2002. Banco Nacional de Datos de Aguas Superficiales (BANDAS). 8 CD's. Comisión Nacional del Agua-Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales-IMTA. Jiutepec, Morelos.
- Karvanen, J. 2006. Estimation of quantile mixtures via L-moments and trimmed L-moments. *Comp. Stat. Data Anal.* 51: 947-959.
- the analyses of frequency of floods, since it reduces the *SEF* in half of the records processed. The fitting of the distribution GLO with this procedure stood out, since it also obtains lower *SEFs* in seven records.
- End of the English version—
- *
- Kite, G. W. 1997. Comparison of frequency distributions. *In: Frequency and Risk Analyses in Hydrology*. Water Resources Publications. Fort Collins, Colorado, U.S.A. pp: 156-168.
- Kottogoda, N. T. and R. Rosso. 2008. Random variables and their properties. *In: Applied Statistics for Civil and Environmental Engineers*. Blackwell Publishing. Chichester, United Kingdom. pp: 83-164.
- Moisello, U. 2007. On the use of partial probability weighted moments in the analysis of hydrological extremes. *Hydrol. Proc.* 21: 1265-1279.
- Rao, A. R. and K. H. Hamed. 2000. The Logistic Distribution. *In: Flood Frequency Analysis*. CRC Press. Boca Raton, Florida, U.S.A. pp: 291-321.
- SRH (Secretaría de Recursos Hidráulicos). 1975. Boletín Hidrológico No. 36. Tomos I y VI. Región Hidrológica No. 10 (Sinaloa). Dirección de Hidrología. México, D. F.
- Shabri, A. B., Z. M. Daud and N. M. Ariff. 2011. Regional analysis of annual maximum rainfall using TL-moments method. *Theor. Appl. Climatol.* 104: 561-570.
- Stedinger, J. R., R. M. Vogel and E. Foufoula-Georgiou. 1993. Frequency analysis of extreme events. *In: Maidment, D. R. (ed). Handbook of Hydrology*. McGraw-Hill, Inc. New York, U.S.A. pp: 18.1-18.66.
- Wilks, D. S. 2011. Qualitative assessments of the goodness fit. *In: Statistical Methods in the Atmospheric Sciences*. Academic Press (Elsevier). San Diego, U.S.A. Third edition. pp: 112-116.